**09 ноября 2020 года (составить конспект, ответить на вопросы и выполнить задания)**

**Тема: Представление числовой информации с помощью систем счисления**

Для записи информации о количестве объектов используются числа. Числа записываются с использованием особых знаковых систем, которые называются системами счисления. Алфавит систем счисления состоит из символов, которые называются цифрами. Например, в десятичной системе счисления числа записываются с помощью десяти всем хорошо известных цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

***Система счисления****- это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.*

Все системы счисления делятся на две большие группы: *позиционные* и *непозиционные* системы счисления. В позиционных системах счисления значение цифры зависит от ее положения в числе, а в непозиционных - не зависит.

**Римская непозиционная система счисления.** Самой распространенной из непозиционных систем счисления является римская. В качестве цифр в ней используются: I (1), V (5), X (10), L (50), С (100), D (500), М (1000).

Значение цифры не зависит от ее положения в числе. Например, в числе XXX (30) цифра X встречается трижды и в каждом случае обозначает одну и ту же величину - число 10, три числа по 10 в сумме дают 30.

Величина числа в римской системе счисления определяется как сумма или разность цифр в числе. Если меньшая цифра стоит слева от большей, то она вычитается, если справа - прибавляется. Например, запись десятичного числа 1998 в римской системе счисления будет выглядеть следующим образом:

MCMXCVIII = 1000 + (1000 - 100) + (100 -10)+ 5 + 1 + 1 + 1.

**Позиционные системы счисления.** Первая позиционная система счисления была придумана еще в Древнем Вавилоне, причем вавилонская нумерация была шестидесятеричной, то есть в ней использовалось шестьдесят цифр! Интересно, что до сих пор при измерении времени мы используем основание, равное 60 (в 1 минуте содержится 60 секунд, а в 1 часе - 60 минут).

В XIX веке довольно широкое распространение получила двенадцатеричная система счисления. До сих пор мы часто употребляем дюжину (число 12): в сутках две дюжины часов, круг содержит тридцать дюжин градусов и так далее.

*В****позиционных системах счисления****количественное значение цифры зависит от ее позиции в числе.*

Наиболее распространенными в настоящее время позиционными системами счисления являются десятичная, двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная. Каждая позиционная система имеет определенный *алфавит цифр* и *основание*.

*В****позиционных системах счисления****основание системы равно количеству цифр (знаков в ее алфавите) и определяет, во сколько раз различаются значения одинаковых цифр, стоящих в соседних позициях числа.*

Десятичная система счисления имеет алфавит цифр, который состоит из десяти всем известных, так называемых арабских, цифр, и основание, равное 10, двоичная - две цифры и основание 2, восьмеричная - восемь цифр и основание 8, шестнадцатеричная - шестнадцать цифр (в качестве цифр используются и буквы латинского алфавита) и основание 16 (табл. 1.2).

|  |
| --- |
| Таблица 1.2. Позиционные системы счисления |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | Система счисления | Основание | Алфавит цифр | | Десятичная | 10 | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 | | Двоичная | 2 | 0, 1 | | Восьмеричная | 8 | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | | Шестнадцатеричная | 16 | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, А(10), В(11), C(12), D(13), E(14), F(15) | |

**Десятичная система счисления.** Рассмотрим в качестве примера десятичное число 555. Цифра 5 встречается трижды, причем самая правая цифра 5 обозначает пять единиц, вторая справа - пять десятков и, наконец, третья справа - пять сотен.

Позиция цифры в числе называется *разрядом*. Разряд числа возрастает справа налево, от младших разрядов к старшим. В десятичной системе цифра, находящаяся в крайней справа позиции (разряде), обозначает количество единиц, цифра, смещенная на одну позицию влево, - количество десятков, еще левее - сотен, затем тысяч и так далее. Соответственно имеем разряд единиц, разряд десятков и так далее.

Число 555 записано в привычной для нас *свернутой* форме. Мы настолько привыкли к такой форме записи, что уже не замечаем, как в уме умножаем цифры числа на различные степени числа 10.

В *развернутой* форме записи числа такое умножение записывается в явной форме. Так, в развернутой форме запись числа 555 в десятичной системе будет выглядеть следующим образом:

55510 = 5 × 102 + 5 × 101 + 5 × 100.

Как видно из примера, число в позиционной системе счисления записывается в виде суммы числового ряда степеней *основания* (в данном случае 10), в качестве коэффициентов которых выступают цифры данного числа.

Для записи десятичных дробей используются отрицательные значения степеней основания. Например, число 555,55 в развернутой форме записывается следующим образом:

555,5510 = 5 × 102 + 5 × 101 + 5 × 100 + 5 × 10-1 + 5 × 10-2 .

В общем случае в десятичной системе счисления запись числа А10, которое содержит n целых разрядов числа и m дробных разрядов числа, выглядит так:

A10 = an-1 × 10n-1 + ... + a0 × 100 + a-1 × 10-1 + ... + a-m × 10-m

Коэффициенты ai в этой записи являются цифрами десятичного числа, которое в свернутой форме записывается так:

А10 = an-1 an-2 ... a0, a-1 ... a-m.

Из вышеприведенных формул видно, что умножение или деление десятичного числа на 10 (величину основания) приводит к перемещению запятой, отделяющей целую часть от дробной, на один разряд соответственно вправо или влево. Например:

555,5510 × 10 = 5555,510;   
555,5510 : 10 = 55,55510.

**Двоичная система счисления.** В двоичной системе счисления основание равно 2, а алфавит состоит из двух цифр (0 и 1). Следовательно, числа в двоичной системе в развернутой форме записываются в виде суммы степеней основания 2 с коэффициентами, в качестве которых выступают цифры 0 или 1.

Например, развернутая запись двоичного числа может выглядеть так:

А2 = 1 × 22 + 0 × 21 + 1 × 20 + 0 × 2-1 + 1 × 2-2.

Свернутая форма этого же числа:

А2 = 101,012.

В общем случае в двоичной системе запись числа А2, которое содержит n целых разрядов числа и m дробных разрядов числа, выглядит так:

А2 = an-1 × 2n-1 + an-2 × 2n-2 + ... + a0 × 20 + a-1 × 2-1 + ... + a-m × 2-m

Коэффициенты аi в этой записи являются цифрами (0 или 1) двоичного числа, которое в свернутой форме записывается так:

А2 = аn-1 аn-2 ... а0,а-1 а-2 ... а-m

Из вышеприведенных формул видно, что умножение или деление двоичного числа на 2 (величину основания) приводит к перемещению запятой, отделяющей целую часть от дробной на один разряд соответственно вправо или влево. Например:

101,012 × 2 = 1010,12;   
101,012 : 2 = 10,1012.

**Позиционные системы счисления с произвольным основанием.** Возможно использование множества позиционных систем счисления, основание которых равно или больше 2. В системах счисления с основанием q (q-ичная система счисления) числа в развернутой форме записываются в виде суммы степеней основания q с коэффициентами, в качестве которых выступают цифры 0, 1, q - 1:

Aq = an-1 × qn-1 + an-2 × qn-2 + ... + a0 × q0 + a-1 × q-1 + ... + a-m × q-m

Коэффициенты аi в этой записи являются цифрами числа, записанного в q-ичной системе счисления.

Так, в восьмеричной системе основание равно восьми (q = 8). Тогда записанное в свернутой форме восьмеричное число А8 = 673,28 в развернутой форме будет иметь вид:

А8 = 6 × 82 + 7 × 81 + 3 × 80 + 2 × 8-1.

В шестнадцатеричной системе основание равно шестнадцати (q = 16), тогда записанное в свернутой форме шестнадцатеричное число А16 = 8A,F16 в развернутой форме будет иметь вид:

А16 = 8 × 161 + А × 160 + F × 16-1.

Если выразить шестнадцатеричные цифры через их десятичные значения (А=10, F=15), то запись числа примет вид:

А16 = 8 × 161 + 10 × 160 + 15 × 16-1.

**Контрольные вопросы**

1. Чем отличаются позиционные системы счисления от непозиционных?

2. Может ли в качестве цифры использоваться символ буквы?

3. Какое количество цифр используется в q-ичной системе счисления?

**Задания**

1.6. Записать числа 19,9910; 10,102; 64,58; 39,F16 в развернутой форме.

1.7. Во сколько раз увеличатся числа 10,110; 10,12; 64,58; 39,F16 при переносе запятой на один знак вправо?

1.8. При переносе запятой на два знака вправо число 11,11x увеличилось в 4 раза. Чему равно х?

1.9. Какое минимальное основание может иметь система счисления, если в ней записаны числа 23 и 67?

1.10. Записать число 199910 в римской системе счисления.